

АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ ОБЪЕМНОЙ АКТИВНОСТИ РАДОНА С ПОМОЩЬЮ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕЙБУЛЛА-ГНЕДЕНКО

Аннотация. Рассмотрена возможность описания результатов измерения объемной активности радона с помощью смещенного трехпараметрического распределения Вейбулла-Гнеденко, позволяющего выявить природу, характер источника эксхалации радона и оценить верхнее возможное значение объемной активности радона на исследованной территории. Дан сравнительный анализ применения трехпараметрического распределения Вейбулла-Гнеденко и логарифмического нормального распределения на основе информационных свойств статистических распределений с использованием топографической классификации.

Ключевые слова: идентификация несимметричных распределений, энтропийный коэффициент, контрэкссесс, объемная активность радона, топографическая классификация симметричных распределений, распределение Вейбулла-Гнеденко, логарифмически нормальное распределение.

Abstract. This article considers the possibility of the description which shows the results of measurement of radon volume activity by means of the displaced three-parametrical distribution Vejbull-Gnedenko, allowing to reveal the nature, the character of a source radon exhalation and to estimate the top possible value of radon on the investigated territory. The comparative analysis of application of the three-parametrical distribution Vejbull-Gnedenko and the logarithmic normal distribution on the basis of the information properties of the static distributions with the use of a topographical classification is given.

Keywords: identification of nonsymmetric distributions, entropy coefficient, antikurtosis, volumetric (mass) activity of radon, topographical classification of symmetrical distributions, distribution Vejbull-Gnedenko, logarithmic normal distribution.

Введение

В литературе при анализе результатов радоновых обследований традиционно принято использовать свойства логнормального распределения [1, 2]. Возможности аппроксимации результатов измерений объемной активности (ОА) радона на территории г. Пензы и их анализ с помощью логарифмически нормального распределения были рассмотрены авторами в ранее опубликованной работе [3]. Существование мощного локального источника на исследуемой территории приводит к смещению регистрируемых значения ОА радона в область больших значений. В этом случае в качестве сглаживающего распределения наиболее применимо смещенное трехпараметрическое распределение Вейбулла-Гнеденко.

В современной литературе распределение Вейбулла-Гнеденко нашло широкое применение, в связи с его универсальностью [4, 5]. Целый ряд распределений является, по сути, частным случаем распределения Вейбулла-Гнеденко, функция которого имеет вид

$$F(x) = 1 - \exp \left(- \left| \frac{x - x_0}{a} \right|^c \right), \quad (1)$$

где a – параметр масштаба; c – параметр формы; x_0 – смещение.

При значениях $c > 2$ и $x_0 = 0$ распределение Вейбулла-Гнеденко позволяет аппроксимировать логарифмически нормальное распределение и служит достаточно хорошим приближением для ряда других законов, используемых в различных моделях прикладной математической статистики [6]. Если $c > 5$, то такое распределение хорошо аппроксимирует нормальное распределение. При параметре $c = 2$ распределение Вейбулла-Гнеденко совпадает с распределением Рэлея. Значение параметра формы $c = 1$ превращает выражение (1) в показательное распределение.

В статье рассмотрена возможность описания результатов измерения ОА радона с помощью смещенного трехпараметрического распределения Вейбулла-Гнеденко, позволяющих выявить природу и характер источника эксхалляции. В связи с тем, что оценка параметров распределения очень сильно зависит от метода оценки его параметров, появляется необходимость последующей идентификации соответствия полученной реализации сглаживающей функции исходной выборке значений.

В современной практике идентификации симметричных распределений широкое применение находит метод, связанный с определением двух параметров: контрэксцесса χ и энтропийного коэффициента k [5], позволяющих учитывать количество информации, содержащейся в распределении.

1 Информационный метод идентификации статистических распределений

Авторами работы рассматривается возможность идентификации асимметричного распределения Вейбулла-Гнеденко, состоящая в преобразовании распределения к симметричному двустороннему распределению Лапласа и использовании топографической диаграммы, которая построена в осях энтропийного коэффициента k_3 и контрэксцесса χ для симметричных распределений. Области оценок χ и k_3 принятия гипотезы нормального и показательного экспоненциального распределений, показаны на рис. 1 в виде заштрихованных областей A и B соответственно. Цифрами 1 и 2 обозначены местоположения соответствующих распределений. Положения оценок χ и k_3 , рассчитанных для реализации сглаживающих логарифмически нормальных распределений, изображены на рис. 1 с помощью точек, где параметры самого распределения получены следующими методами: a – методом моментов с использованием среднего значения и дисперсии; b – методом максимального правдоподобия; c – методом основанном на выборочных квантилях; d – методом моментов с использованием среднего значения и медианы; e – методом моментов с использованием эксцесса; k – методом, основанном на выборочных квантилях; m – методом максимального правдоподобия.

При идентификации логарифмического нормального распределения статистическая выборка подвергалась преобразованию вида

$$z = \ln x, \quad (2)$$

что позволило свести данные к центрированному нормальному распределению величины z , для которого на топографической диаграмме распределений соответствует точка 1 с известными значениями контрэксцесса χ и энтропийного коэффициента k , равными соответственно 0,577 и 2,066.

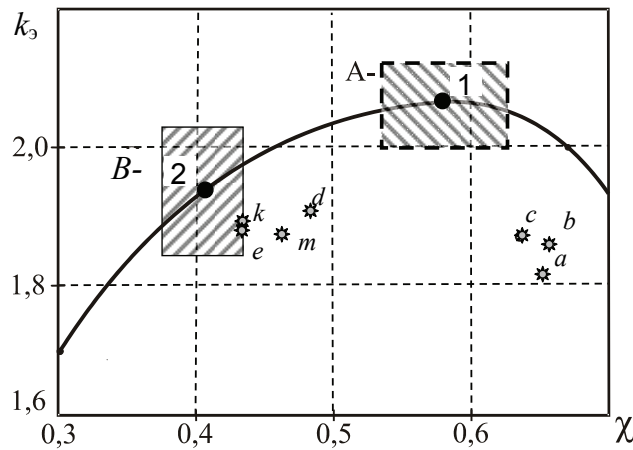


Рис. 1 Топографическая диаграмма распределений

Разброс Δ_χ и Δ_k оценок χ и k зависит от выбора доверительной вероятности оценки и от количества n измерений в выборке. Для расчета разброса оценок при доверительной вероятности $p=0,9$ в работе использовались формулы вида [7]:

$$\Delta_{0,9}(\chi) = 1,6\chi \frac{\sqrt[4]{(\varepsilon^2 - 1)^3}}{\sqrt{29n}},$$

$$\Delta_{0,9}(k) = 1,44/(\chi k \sqrt{kn}), \quad (3)$$

где ε – эксцесс распределения.

Интервалы неопределенности Δ_χ и Δ_k нормального распределения, эксцесс которого равен 1,733, рассчитанные для зимнего периода наблюдений из выражений (3), соответственно равны 0,04 и 0,07.

Возможность использования подобного подхода для идентификации смещенного распределения Вейбулла-Гнеденко связана с преобразованием выборки результатов в соответствии с выражением

$$y = -\left| \frac{x - \bar{x}}{a} \right|^c \quad (4)$$

к показательному (экспоненциальному) распределению вида

$$F(y) = 1 - e^{-\lambda y}.$$

Здесь λ – параметр масштаба. Для показательного распределения $\lambda = 1$.

В результате симметричного отражения положительных значений результатов y_i относительно нулевого значения величины ($y_0 = 0$) выборка преобразуется к симметричному двухстороннему показательному распределению Лапласа, вида

$$F(z) = \begin{cases} 1 - 0,5e^{-\lambda z} & | z \geq 0, \\ 0,5e^{-\lambda z} & | z \leq 0. \end{cases}$$

На топографической диаграмме, показанной на рис. 1, распределению Лапласа отвечает точка 2, для которой значение контрэксцесса χ и энтропийного коэффициента k соответственно равны 0,408 и 1,92. Следовательно, если преобразованная в соответствии с выражением (4) выборка результатов после симметричного отражения данных относительно нулевого значения соответствует распределению Лапласа, то исходная выборка результатов измерения радона x_i будет соответствовать смещенному распределению Вейбулла-Гнеденко. Интервалы неопределенности Δ_χ и Δ_k для оценки распределения Лапласа с эксцессом ϵ равным 2,45, рассчитанные согласно выражению (3), равны 0,03 и 0,1 соответственно.

2 Результаты статистического анализа распределения

Параметры сглаживающего распределения при аппроксимации выборки достаточно сильно зависят от метода оценки параметров распределения. Поэтому при проведении анализа для каждого распределения рассматривались несколько возможных реализаций, отличающихся методами оценки параметров распределений. Для логарифмического нормального распределения параметр масштаба m и параметр формы a оценивались тремя различными методами [8]:

- 1) моментов с использованием среднего значения и дисперсии;
- 2) максимального правдоподобия;
- 3) оценки, основанном на выборочных квантилях.

Параметры формы s , масштаба a и смещения (сдвига) x_0 смещенного трехпараметрического распределения Вейбулла-Гнеденко оценены также с помощью нескольких методов [9]:

- 1) моментов, основанном на разности среднего значения и медианы;
- 2) моментов, основанном на коэффициенте эксцесса;
- 3) оценки параметров, основанном на выборочных квантилях;
- 4) максимального правдоподобия.

Сопоставляя оценки контрэксцесса χ и энтропийного коэффициента k с допустимыми интервалами можно сделать следующие выводы по распределению. Все совместные оценки контрэксцесса χ и энтропийного коэффициента k , полученные при аппроксимации данных с помощью логарифмического нормального распределения, находятся на значительном удалении от выделенной на рис. 1 для точки 1 области значений A с доверительной вероятностью 0,9, что обусловлено низкими значениями энтропийного коэффициента выборки, после ее преобразования в соответствии с выражением (2). Полученные результаты указывают на малую вероятность гипотезы выбора логнормального распределения в качестве сглаживающего для выборок измерения ОА радона в летний период. При этом наиболее удачный результат получен методом оценки параметров распределения, основанным на выборочных квантилях. Этой реализации логнормального распределения на топографической диаграмме рис. 1 соответствует точка c .

Для смещенного трехпараметрического распределения Вейбулла-Гнеденко все значения энтропийных коэффициентов k попадают в интервал значений $[1,82; 2,02]$, ограничивающий для точки 2 (рис. 1) области значений с доверительной вероятностью 0,9; значения контрэксцесса χ находятся на

границе выделенной области или в непосредственной близости от нее. Полученный результат позволяет утверждать, что из всех рассматриваемых в работе распределений наиболее вероятна гипотеза для выборок измерения ОА радона в качестве сглаживающего распределения смещенного трехпараметрического распределения Вейбулла-Гнеденко. Причем из четырех полученных реализаций сглаживающего трехпараметрического распределения следует выделить вторую и третью (на топографической диаграмме обозначены буквами k и e соответственно), параметры которых оценивались методом моментов с использованием эксцесса и методом выборочных квантилей. Для этих реализаций при доверительной вероятности 0,9 совместные оценки контрэксцесса χ и энтропийного коэффициента k расположены на границе выделенной области значений точки 2 топографической диаграммы.

На рис. 2 дана гистограмма плотностей частот распределения для результатов измерения ОА радона летнего периода измерений и типичные реализации сглаживающих логнормального распределения, для которых оценки параметров реализации получены следующим методом: 1 – методом моментов; 2 – методом максимального правдоподобия; 3 – методом, основанном на выборочных квантилях.

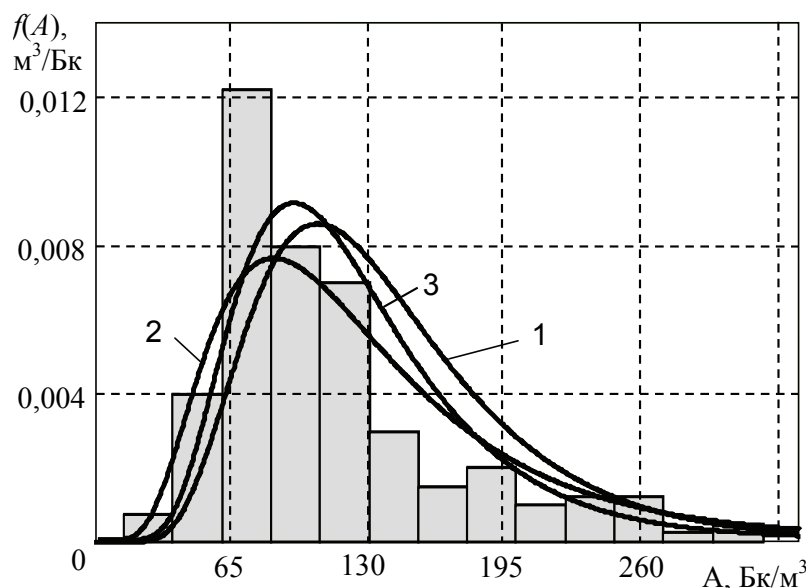


Рис. 2 Гистограмма плотностей частот распределения ОА радона и сглаживающие реализации логарифмического нормального распределения

На рис. 3 дана гистограмма плотностей частот распределения для результатов измерения ОА радона летнего периода и типичные сглаживающие реализации смещенного трехпараметрического распределения Вейбулла-Гнеденко. Оценка параметров реализации распределения проведена следующими методами: 1 – методом, основанном на разности среднего значения и медианы; 2 – методом, основанном на коэффициенте эксцесса; 3 – методом оценки параметров, основанном на выборочных квантилях; 4 – методом максимального правдоподобия. Нумерация распределений, применяемая на рис. 2, 3, соответствует нумерации реализаций, используемой в табл. 1.

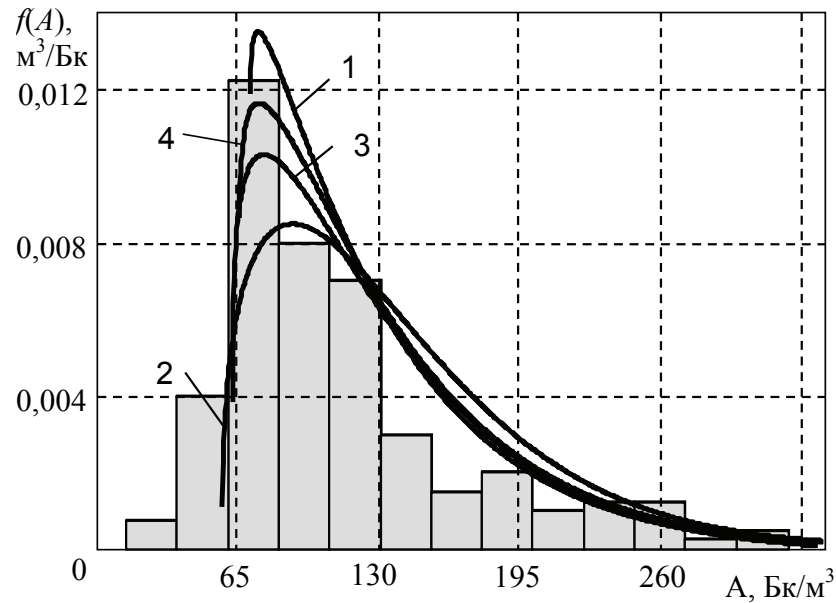


Рис. 3 Гистограмма плотностей частот распределения ОА радона и сглаживающие реализации смещенного трехпараметрического распределения Вейбулла-Гнеденко

Таблица 1

Оценки контрэксцесса и энтропийного коэффициента выборки ОА радона для используемых типов несимметричных сглаживающих распределений

Тип несимметричного сглаживающего распределения	Летний период		
	Коэффициенты распределения	χ	k
Логарифмическое нормальное	1. $m = 118,8 \text{ Бк/м}^3$; $a = 0,428$	0,649	1,806
	2. $m = 122,4 \text{ Бк/м}^3$; $a = 0,4$	0,655	1,811
	3. $m = 112,5 \text{ Бк/м}^3$; $a = 0,423$	0,637	1,867
Смещенное трехпараметрическое Вейбулла-Гнеденко	1. $c = 1,052$; $a = 62,52 \text{ Бк/м}^3$; $x_0 = 68,88 \text{ Бк/м}^3$	0,484	1,915
	2. $c = 1,356$; $a = 85,36 \text{ Бк/м}^3$; $x_0 = 51,95 \text{ Бк/м}^3$	0,443	1,865
	3. $c = 1,295$; $a = 81,044 \text{ Бк/м}^3$; $x_0 = 55,258 \text{ Бк/м}^3$	0,441	1,879
	4. $c = 1,234$; $a = 76,581 \text{ Бк/м}^3$; $x_0 = 57,36 \text{ Бк/м}^3$	0,461	1,88

Заключение

Таким образом, из проведенной идентификации распределений следует, что в качестве сглаживающего распределения следует принять вторую или третью реализацию смещенного трехпараметрического распределения Вейбулла-Гнеденко, имеющие близкие значения контрэксцесса. Использование этого распределения в качестве сглаживающего указывает на существование в летний период сравнительно большого источника ОА радона, расположенного на исследуемой территории г. Пензы. Усреднение параметра смещения для различных реализаций распределения Вейбулла-Гнеденко позволяет также оценить верхнее возможное значение объемной активности источника. Авторы статьи полагают, что таким источником может быть существующий на территории г. Пензы геологический разлом.

Список литературы

1. **Микляев, П. С.** Закономерности миграции и эксхалляции радона из грунтов на территории г. Москвы : дис. ... канд. геолого-минералог. наук / П. С. Микляев. – М., 2002. – 170 с.
2. **Ярмошенко, И. В.** Использование свойств логнормального распределения при анализе результатов радоновых обследований / И. В. Ярмошенко, М. В. Жуковский, И. А. Кирдин // Актуальные проблемы ограничения облучения населения от природных источников ионизирующего излучения. Радон – 2000 : материалы научно-практической конференции (18–20 апреля 2000 г.) – М., 2000. – С. 17–20.
3. **Тертычная, С. В.** Методика наблюдения за миграцией радона в населенных пунктах / С. В. Тертычная, В. Г. Полосин // Современные технологии безопасности. – 2006. – № 3–4 (18–19). – С. 24–26.
4. **Лемешко, Б. Ю.** Статистическое моделирование как эффективный инструмент для исследования закона распределения функций случайных величин / Б. Ю. Лемешко, Д. В. Огурцов // Метрология. – 2007. – № 5. – С. 3–13.
5. **Петрович, М. Л.** Статистическое оценивание и проверка гипотез на ЭВМ / М. Л. Петрович, М. И. Давидович. – М. : Финансы и статистика, 1989. – 192 с.
6. **Вадзинский, Р. Н.** Справочник по вероятностным распределениям / Р. Н. Вадзинский. – СПб. : Наука, 2001. – 296 с.
7. **Новицкий, П. В.** Оценка погрешностей результатов измерений / П. В. Новицкий, И. А. Зограф. – Л. : Энергоатомиздат, 1985. – С. 175–177.
8. ГОСТ 11. 009–73. Прикладная статистика: Правила определения оценок и доверительных границ для параметров логарифмического нормального распределения. – М. : Изд-во стандартов, 1980.
9. ГОСТ 11. 007–74. Прикладная статистика: Правила определения оценок и доверительных границ для параметров распределения Вейбулла. – М. : Изд-во стандартов, 1980.

Полосин Виталий Германович

кандидат технических наук, доцент,
кафедра физики,
Пензенский государственный
университет

Polosin Vitaliy Germanovich

PhD in technical science,
associate professor, sub-department
of physics, Penza State University

Тертычная Светлана Вячеславовна

ассистент, кафедра физики
Пензенский государственный
университет

Tertychnaya Svetlana Vyacheslavovna

Assistant professor, sub-department
of physics, Penza State University

УДК 519.24:546.296

Полосин, В. Г.

Анализ результатов измерений объемной активности радона с помощью распределения Вейбулла-Гнеденко / В. Г. Полосин, С. В. Тертычная // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2009. – № 1 (9). – С. 127–133.